*Mathématiques Spécialités 1ère Lycée Rotrou 28/08/21*

**Chapitre 5 : Dérivation**

**0) ACTIVITES PREPARATOIRES**

***1) Notion de vitesse instantanée.***

Une bille est lâchée d’un point O situé à 25m du sol. La distance parcourue par la bille à la date *t* est *d(t) = 5t²* ( *t* en secondes, *d(t)* en mètres). On conçoit que cette bille en mouvement possède à l’instant *t = 2* une vitesse instantanée. Nous la noterons *v(2).* Comment la calculer ?

Intuitivement, on peut penser que l’on aura une bonne idée de *v(2)* à partir des vitesses moyennes entre les dates *2* et *2+h* lorsque *h* est proche de *0*.

1) Vérifiez que la vitesse moyenne entre les dates *2* et *2 + h* est *20+5h*. Calculez les valeurs correspondant à *h=-0,1* (c'est-à-dire la vitesse moyenne entre *t=* et *t=* ).

à *h=-0.05* (c'est-à-dire la vitesse moyenne entre *t=* et *t=* ).

à *h=0.05* ; à *h=0.01* ; à *h=0.0001* ; à *h=0.000000001.*

2) Chacune des vitesses moyennes obtenues est une approximation de *v(2)* ; mais aucune n’est réellement *v(2)*. Puisque l’approximation est d’autant meilleure que h est petit, la seule façon de définir *v(2)* est de dire que *v(2)* est la limite de  lorsque *h* tend vers 0 ; c'est-à-dire lorsque *h* prend des valeurs de plus en plus voisines de 0.

- Puisque ce rapport est égal à *20+5h* ; quelle sera cette limite lorsque *h* tend vers zéro ?

- Complétez *v(2)*=…………..

Conclusion : Pour définir une vitesse instantanée, nous avons étudié la limite en zéro d’une fonction de type . (Avec dans cet exemple *a=2)*

2) Avec Geogébra :

A) Soit C la courbe d’équation *y=x²* dans un repère orthonormé  et A le point de C d’abscisse *1*. Quelle est l’ordonnée de A ? Soit *h* un réel différent de *0* et M le point d’abscisse *1+h*.

1) Déterminer en fonction de *h* le coefficient directeur de la droite (AM).

2) Calculer ce coefficient directeur pour *h=1 ; h=0,5 ; h=0,1 ; h=0,01 ; h=0,0001 ; h=-0,0001 ; h= -0,1 ; h= -0,5.*

3) Vers quoi semble tendre ce coefficient directeur lorsque h tend vers 0 ?

B) Observation à l’aide du logiciel GEOGEBRA.

I) NOMBRE DÉRIVÉ DE f EN a.

1) Taux d'accroissement de f entre a et a+h.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que . Soit Cf sa courbe représentative dans un repère . Soit a un nombre réel de I et A le point de Cf d'abscisse a. Son ordonnée est donc : !

**Définition :** Le taux d'accroissement de f entre a et a+h est le rapport avec a et a+h appartenant à I.

Sur le graphique, r(h) est le coefficient directeur d'une sécante (AM) à Cf.

Remarque : en cinématique, la variable x est le temps t, f est la loi horaire et r(h) la vitesse moyenne d'une mobile entre les instants a et a+h.

2) Nombre dérivé de f en a.

Lorsque h tend vers 0;

M se rapproche de

Et la sécante (AM) se rapproche de

Le taux r(h), coefficient directeur de (AM) se rapproche alors du

**Définition :** Si r(h) tend vers un nombre réel quand h tend vers 0, on dit que et on appelle ce nombre le nombre dérivé de f en a. Ce nombre est noté :

Rem : On écrit :

Comme est le coefficient directeur de la sécante (AM) et que cette dernière se confond avec la tangente à Cf en A lorsque h tend vers 0, alors :

3) Exemples :

a) Soit . Cette fonction est-elle dérivable en 3?

b) Soit . Cette fonction est-elle dérivable en 2?

4) Tangente en un point à une courbe.

**Définition :** Si f est dérivable en a, alors la courbe Cf admet au point de coordonnées A(a,f(a)) une tangente : c'est la droite passant par A et de coefficient directeur f'(a). Une équation de cette tangente s'écrit alors

(T) :

Démonstration :

II) FONCTION DÉRIVÉE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

1) Définition

Soit . On a déjà vu que :

Calculons f'(a) pour tout réel a :

Ainsi, pour tout réel a, f'(a)= avec bien évidemment f(x)=x².

Donc on peut dire que pour tout réel x

Ceci permet de déterminer une fonction f' qu'on appelle fonction dérivée de f !

**Définition : Soit f une fonction dérivable pour tout réel x d'un intervalle I. La fonction qui à chaque réel x de I associe le nombre dérivé de f en x (f'(x)) est appelée fonction dérivée de f sur I. Elle est notée f'.**

2) Dérivée des fonctions de référence :

* Soit

Démonstration:

* Soit

Démonstration :

De la même manière on obtient :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Df | f(x) | Df' | f '(x) |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

III) Dérivation et opérations.

1) Somme et produit de 2 fonctions dérivables

**Théorème:** Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors les fonctions somme (u+v) et produit () sont dérivables sur I et pour tout x appartenant à I :

La dérivée d'une somme est égale à

La dérivée d'un produit

Conséquences :

* **Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I et k un réel quelconque. Pour tout réel x de I on a :**
* **La fonction définie sur R par est dérivable sur R et .**

Exemple :

* **Toute fonction polynôme est dérivable sur R.**

2) Quotient de deux fonctions dérivables

**Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que v ne s'annule pas sur I. Alors**

ATTENTION à l'ordre des termes !!!!!!!!

Exemple :

3) Dérivée de

Propriété (admise) : SI g est une fonction dérivable sur un intervalle J et si a et b sont deux nombres réels tels que pour tout x appartenant à un intervalle I ; ax+b appartient à J ; alors la fonction est dérivable sur I. Pour tout nombre réel x de I :

Exemples :